TITLE:

退化放物型偏微分方程式の確率解の近似表現(確率数値解析に於ける諸問題,II)

AUTHOR(S):

天野, 一男

CITATION:
天野, 一男. 退化放物型偏微分方程式の確率解の近似表現(確率数値解析に於ける諸問題,II). 数理解析研究所講究録 1995, 932: 163-171

ISSUE DATE:
1995-12

URL:
http://hdl.handle.net/2433/59966

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
932 巻 1995 年 163-171

退化放物型偏微分方程式の確率解の近似表現

城西大学理学部 天野一男 (KAZUO AMANO)

アブストラクト. $a(x) \geq 0$ と $b(x)$ は滑らかな実数値関数とする。$\xi(x)$ は確率微分方程式

$$\begin{cases} d\xi(s) = \sqrt{a\big(\xi(s)\big)}\,dw(s) + b\big(\xi(s)\big)\,ds \\ \xi(t) = x \end{cases}$$

の解とする。このとき

$$u(t,x) = E\big[\,\phi\big(\xi(T)\big)\,\big]$$

は偏微分方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} Lu = 0 & in \quad (0,T) \times (-\infty,\infty) \\ u(T,x) = \phi(x) & on \quad (-\infty,\infty) \end{cases}$$

の解を与える。ただしここで

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} \ .$$

本講演の目的は、次の近似表現を計算するためのアルゴリズムを与えて、その誤差評価を証明することである：$\forall (t,x)\ \exists \{p_j\}\ \exists \{\xi_j\}\quad s.t.$

$$u(t,x) \sim \sum_j p_j \phi(\xi_j) \qquad \big(\,\forall \phi \in C^1_{\mathrm{bdd}}(\mathbf{R})\,\big)$$

1. なぜこのような研究をするのか？

- 講演者の知る限り、退化する放物型偏微分方程式の近似解法はこれまでに研究されたことがない。確率論的な考え方が、退化する方程式に対する新しい数値解析的手法を生み出す可能性がある。

「確率論的な考え方」 $\Longrightarrow$ 「新しい数値解析的手法」

- 任意関数 $\phi(x)$ を含んだ **近似一般解**

$$u(t,x) \sim \sum_j p_j \phi(\xi_j)$$

の構成法を与える。われわれの提唱するアルゴリズムは、数値解析と数式処理の融合の上に成り立っている（数値－数式ハイブリッド法）。
初期条件を変えて、何回も数値実験をしなければならないような場合には、数値一般解を用いた方が良いと思われる。

- 確率解

$$u(t,x) = E\big[\,\phi\big(\xi(T)\big)\,\big]$$

に到達する最もオーソドックスな方法は、
SDE の近似解 $\Longrightarrow$ 確率解の近似表現
であろうが、われわれは
PDE の近似解 $\Longrightarrow$ 確率解の近似表現
という道筋をたどる。これにより、SDE を近似的に解くという困難さを回避する。
場合によっては、直接 SDE を解くのではなく PDE を解いた方が良いのではなかろうか？

2. Key Lemma

次の事実は、Taylor の定理の一つのバリエーションである：任意の整数 n と任意の C^{n+1} 級関数 $u(t,x)$ に対して

$$\begin{aligned}
&u(t+h, x+k) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}\Big(h\frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\nu} u(t,x) \\
&+ \int_0^1 \frac{(1-\theta)^n}{n!}\Big(h\frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{n+1} u(t+\theta h, x+\theta k)\, d\theta
\end{aligned}$$

この事実より、次の Key Lemma が従う。

補題. 関数 $u(t,x) \in C^{2,4}\big([0,\infty) \times (-\infty,\infty)\big)$ は退化放物型偏微分方程式

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

の解であると仮定する。このとき、

$$0 < h \ll 1, \quad t + h^2 \leq T$$

ならば

$$\begin{aligned}
&u(t,x)\\
&= \frac{1}{6}\,u\bigl(t, x+\sqrt{a(x)}\,h\bigr) + \frac{1}{6}\,u\bigl(t, x-\sqrt{a(x)}\,h\bigr)\\
&+ \frac{1}{3}\,u\bigl(t, x+b(x)h^2\bigr) + \frac{1}{3}\,u(t+h^2, x)\\
&- h^4 Ru(t,x)
\end{aligned}$$

がなりたつ。ただしここで、

$$\begin{aligned}
&Ru(t,x)\\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \Bigl\{ \frac{a^2(x)\,(1-\theta)^3}{12}\Bigl(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigl(t, x+\sqrt{a(x)}\,\theta h\bigr)\\
&\qquad + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigl(t, x-\sqrt{a(x)}\,\theta h\bigr)\Bigr)\\
&\qquad + b^2(x)\,(1-\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigl(t, x+b(x)\,\theta h^2\bigr)\\
&\qquad + (1-\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t+\theta h^2, x)\Bigr\}\,d\theta\ .
\end{aligned}$$

証明. Taylor の定理により、

$$\begin{aligned}
&u\bigl(t, x\pm\sqrt{a(x)}h\bigr)\\
&= u(t,x) \pm h\,a^{1/2}(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\\
&+ \frac{h^2}{2}\,a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \pm \frac{h^3}{6}\,a^{3/2}(x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,x)\\
&+ \frac{h^4}{6}\,a^2(x)\int_0^1 (1-\theta)^3\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigl(t, x\pm\theta\sqrt{a(x)}h\bigr)\,d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u\bigl(t, x+b(x)h^2\bigr)\\
&= u(t,x) + h^2 b(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\\
&+ h^4 b^2(x)\int_0^1 (1-\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigl(t, x+\theta\,b(x)h^2\bigr)\,d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u(t+h^2, x)\\
&= u(t,x) + h^2\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\\
&+ h^4\int_0^1 (1-\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t+\theta h^2, x)\,d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}u\big(t, x+\sqrt{a(x)}\,h\big)+\frac{1}{2}u\big(t, x-\sqrt{a(x)}\,h\big) \\
&+u(t, x+b(x)h^2)+u(t-h^2, x) \\
&= 3u(t,x)-h^2Lu(t,x) \\
&+h^4\left\{\frac{a^2(x)}{12}\int_0^1(1-\theta)^3\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\big(t, x+\theta\sqrt{a(x)}\,h\big)\right.\right. \\
&\qquad\left.+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\big(t, x-\theta\sqrt{a(x)}\,h\big)\right)d\theta \\
&\qquad+b^2(x)\int_0^1(1-\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x+\theta\, b(x)h^2)\,d\theta \\
&\qquad\left.+\int_0^1(1-\theta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t-\theta h^2, x)\,d\theta\right\}
\end{aligned}
$$

よって、仮定より $Lu=0$ なので、目的の式が従う。 ∎

3. Algorithm

Key Lemma より、以下の近似式が得られる。

$$
\begin{aligned}
u(t,x) \sim{}& \frac{1}{6}\,u\big(t, x+\sqrt{a(x)}\,h\big) \\
&+\frac{1}{6}\,u\big(t, x-\sqrt{a(x)}\,h\big) \\
&+\frac{1}{3}\,u\big(t, x+b(x)h^2\big) \\
&+\frac{1}{3}\,u(t+h^2, x)
\end{aligned}
$$

この式をさらに再帰的に用いることにより、次の式を得る。

$$
\begin{aligned}
u(t,x) \sim\ & \frac{1}{36}u\Big(t, x + h\sqrt{a(x)} + h\sqrt{a(x + h\sqrt{a(x)})}\Big) \\
&+ \frac{1}{36}u\Big(t, x + h\sqrt{a(x)} - h\sqrt{a(x + h\sqrt{a(x)})}\Big) \\
&+ \frac{1}{36}u\Big(t, x - h\sqrt{a(x)} + h\sqrt{a(x - h\sqrt{a(x)})}\Big) \\
&+ \frac{1}{36}u\Big(t, x - h\sqrt{a(x)} - h\sqrt{a(x - h\sqrt{a(x)})}\Big) \\
&+ \frac{1}{18}u\Big(t, x + h\sqrt{a(x)} + h^2 b(x + h\sqrt{a(x)})\Big) \\
&+ \frac{1}{18}u\Big(t, x - h\sqrt{a(x)} + h^2 b(x - h\sqrt{a(x)})\Big) \\
&+ \frac{1}{18}u\Big(t, x + h^2 b(x) + h\sqrt{a(x + h^2 b(x))}\Big) \\
&+ \frac{1}{18}u\Big(t, x + h^2 b(x) - h\sqrt{a(x + h^2 b(x))}\Big) \\
&+ \frac{1}{9}u\Big(t, x + h^2 b(x) + h^2 b(x + h^2 b(x))\Big) \\
&+ \frac{1}{9}u\Big(t + h^2, x + h\sqrt{a(x)}\Big) \\
&+ \frac{1}{9}u\Big(t + h^2, x - h\sqrt{a(x)}\Big) \\
&+ \frac{2}{9}u\Big(t + h^2, x + h^2 b(x)\Big) \\
&+ \frac{1}{9}u\Big(t + 2h^2, x\Big)
\end{aligned}
$$

この様な計算を繰り返すことにより、われわれの近似一般解が得られる。

4. Errors

$$
Mf(t,x) = \begin{cases}
\frac{1}{6} f\big(t, x + \sqrt{a(x)}\, h\big) + \frac{1}{6} f\big(t, x - \sqrt{a(x)}\, h\big) \\
\quad + \frac{1}{3} f\big(t, x + b(x)h^2\big) + \frac{1}{3} f(t + h^2, x) & \text{if } t \le T - h^2 \\
f(t,x) & \text{otherwise}
\end{cases}
$$

とおく。

$$
u(t,x) \in C^{2,4}\big([0,T] \times (-\infty, \infty)\big)
$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad in \quad (0,T)\times(-\infty,\infty) \\ u(T,x) = \phi(x) \qquad on \quad (-\infty,\infty) \end{cases}$$

と仮定する。

定理. 任意の点 $(t,x)\in(0,T)\times(-\infty,\infty)$ と任意の自然数 $k=0,1,2,\cdots$ に対して、

$$u(t,x) = M^k u(t,x) + k\,O(h^4)$$

証明.

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= Mu(t,x) + O(h^4) \\
u(t,x) &= M(Mu(t,x) + O(h^4)) + O(h^4) \\
&= M^2u(t,x) + MO(h^4) + O(h^4) \\
&= M^2u(t,x) + O(h^4) + O(h^4) \\
&= M^2u(t,x) + 2\,O(h^4) \\
u(t,x) &= M^2(Mu(t,x) + O(h^4)) + 2\,O(h^4) \\
&= M^3u(t,x) + M^2O(h^4) + 2\,O(h^4) \\
&= M^3u(t,x) + O(h^4) + 2\,O(h^4) \\
&= M^3u(t,x) + 3\,O(h^4) \\
&\;\vdots \\
u(t,x) &= M^k u(t,x) + k\,O(h^4) \\
&= M^k(Mu(t,x) + O(h^4)) + k\,O(h^4) \\
&= M^{k+1}u(t,x) + M^kO(h^4) + k\,O(h^4) \\
&= M^{k+1}u(t,x) + O(h^4) + k\,O(h^4) \\
&= M^{k+1}u(t,x) + (k+1)O(h^4) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$M^k u(t,x) = \sum_j p_{k,j}\, u(t_{k,j}, x_{k,j}) \qquad \text{where} \quad \sum_j p_{k,j} = 1$$

と表す。

定理. 任意の点 $(t,x)\in(0,T)\times(-\infty,\infty)$ と任意の自然数 $k=0,1,2,\cdots$ に対して、適当な $\{p_{k,j}\}$, $\{(t_{k,j}, x_{k,j})\}$ が存在して、

$$\begin{aligned}
u(t,x) = &\sum_{t_{k,j}>T-h^2} p_{k,j}\,\phi(x_{k,j}) \\
&+ O(h^2) + O(1)\sum_{\ell=0}^{k_0}\binom{k}{\ell}\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-\ell} + k\,O(h^4)
\end{aligned}$$

ここで k_0 は

$$k_0 \geq \frac{T-t}{h^2}$$

なる最小整数を表す。

証明.

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= M^k u(t,x) + k\,O(h^4) \\
&= \sum_j p_{k,j}\, u(t_{k,j}, x_{k,j}) + k\,O(h^4) \\
&= \sum_{t_{k,j} > T-h^2} p_{k,j}\, u(t_{k,j}, x_{k,j}) \\
&+ \sum_{t_{k,j} \leq T-h^2} p_{k,j}\, u(t_{k,j}, x_{k,j}) + k\,O(h^4) \\
&= \sum_{t_{k,j} > T-h^2} p_{k,j}\, \phi(x_{k,j}) + O(h^2) \\
&+ O(1) \sum_{t_{k,j} \leq T-h^2} p_{k,j} + k\,O(h^4) \\
&= \sum_{t_{k,j} > T-h^2} p_{k,j}\, \phi(x_{k,j}) + O(h^2) \\
&+ O(1) \sum_{\ell=0}^{k_0} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-\ell} + k\,O(h^4) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

5. Examples

$$v(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,(0.5-t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\, e^{-\frac{(y-x)^2}{4(0.5-t)}}\, dy$$

とおくと、 $u(t,x) = v(0.5t, x)$ が初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & in \quad (0,1) \times (-\infty, \infty) \\ u(1,x) = \phi(x) & on \quad (-\infty, \infty) \end{cases}$$

の厳密解を与える。簡単のために、

$$supp\,\phi \subset [0,\ 1]$$

と仮定する。

$u(t,x)$ の近似表現

$$u(t,x) \sim \sum_j p_j \phi(\xi_j)$$

$$p_j = p_j(t,x)\ , \quad \sum_j p_j(t,x) = 1$$

$$-\infty < \xi_j = \xi_j(t,x) < \infty$$

をわれわれの方法で求め、この結果を上述の厳密解と比較してみよう。

trapezoidal rule : $(t,x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ h = \frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}
&u(0.500000, 0.500000)\\
&\sim 0.029119\,\phi(0.062500) + 0.030636\,\phi(0.125000)\\
&+ 0.031981\,\phi(0.187500) + 0.033125\,\phi(0.250000)\\
&+ 0.034044\,\phi(0.312500) + 0.034715\,\phi(0.375000)\\
&+ 0.035124\,\phi(0.437500) + 0.035262\,\phi(0.500000)\\
&+ 0.035124\,\phi(0.562500) + 0.034715\,\phi(0.625000)\\
&+ 0.034044\,\phi(0.687500) + 0.033125\,\phi(0.750000)\\
&+ 0.031981\,\phi(0.812500) + 0.030636\,\phi(0.875000)\\
&+ 0.029119\,\phi(0.937500)
\end{aligned}$$

approximate stochastic solution : $(t,x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ h = \frac{1}{16},\ k = 512$

$$\begin{aligned}
&u(0.500000, 0.500000)\\
&\sim 0.029094\,\phi(0.062500) + 0.030649\,\phi(0.125000)\\
&+ 0.032028\,\phi(0.187500) + 0.033200\,\phi(0.250000)\\
&+ 0.034141\,\phi(0.312500) + 0.034829\,\phi(0.375000)\\
&+ 0.035248\,\phi(0.437500) + 0.035389\,\phi(0.500000)\\
&+ 0.035248\,\phi(0.562500) + 0.034829\,\phi(0.625000)\\
&+ 0.034141\,\phi(0.687500) + 0.033200\,\phi(0.750000)\\
&+ 0.032028\,\phi(0.812500) + 0.030649\,\phi(0.875000)\\
&+ 0.029094\,\phi(0.937500)
\end{aligned}$$

trapezoidal rule : $(t,x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),\ h = \frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}
&u(0.500000, 0.250000)\\
&\sim 0.034044\,\phi(0.062500) + 0.034715\,\phi(0.125000)\\
&+ 0.035124\,\phi(0.187500) + 0.035262\,\phi(0.250000)\\
&+ 0.035124\,\phi(0.312500) + 0.034715\,\phi(0.375000)\\
&+ 0.034044\,\phi(0.437500) + 0.033125\,\phi(0.500000)\\
&+ 0.031981\,\phi(0.562500) + 0.030636\,\phi(0.625000)\\
&+ 0.029119\,\phi(0.687500) + 0.027462\,\phi(0.750000)\\
&+ 0.025698\,\phi(0.812500) + 0.023859\,\phi(0.875000)\\
&+ 0.021980\,\phi(0.937500)
\end{aligned}$$

approximate stochastic solution : $(t,x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),\ h = \frac{1}{16},\ k = 512$

$$\begin{aligned}
&u(0.500000, 0.250000)\\
&\sim 0.033979\,\phi(0.062500) + 0.034707\,\phi(0.125000)\\
&+ 0.035158\,\phi(0.187500) + 0.035324\,\phi(0.250000)\\
&+ 0.035204\,\phi(0.312500) + 0.034801\,\phi(0.375000)\\
&+ 0.034128\,\phi(0.437500) + 0.033200\,\phi(0.500000)\\
&+ 0.032041\,\phi(0.562500) + 0.030677\,\phi(0.625000)\\
&+ 0.029138\,\phi(0.687500) + 0.027458\,\phi(0.750000)\\
&+ 0.025671\,\phi(0.812500) + 0.023810\,\phi(0.875000)\\
&+ 0.021910\,\phi(0.937500)
\end{aligned}$$